

Exercice 3 [E3A PC 2021]

Q28. $x^2 - x - 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 5$ donc ses racines sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On a $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ donc $\boxed{\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{1+1}{2} = 1}$

De plus, par relation coefficients-racines, la seconde racine β vérifie $\alpha \times \beta = -1$,
c'est-à-dire $\boxed{\beta = -\frac{1}{\alpha}}$. coeff
constant

Rq: On pourrait aussi montrer que $\frac{-1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ par le calcul.

Q29. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $b_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} a_n + b_n \stackrel{\text{def}}{=} b_{n-1} + b_n$ (oui cette question est totalement creuse!!)

Q30. D'abord, pour $n=0$, l'expression (a) vaut $\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\alpha\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \stackrel{\alpha \neq 1}{\neq} 0 = b_0$ donc elle-ci ne convient pas.

De plus, comme l'équation caractéristique associée à la suite (b_n) est $x^2 - x - 1$ (Q29), qui a pour racines α et $-\frac{1}{\alpha}$ (Q28), on sait que l'expression doit être une combinaison linéaire de α^n et de $\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n$, ce qui n'est pas le cas de (b).

Finalement, c'est $\boxed{\text{l'expression (c) qui convient.}}$

Q31. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n \stackrel{\text{def}}{=} b_{n-1} \stackrel{\text{Q30}}{=} \boxed{\frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^n}{\alpha^{n-1}\sqrt{5}}}$

Pour $n=0$, on a $a_0 \stackrel{\text{def}}{=} b_1 - b_0 = \boxed{1}$

Rq: Par calcul, on vérifie facilement que l'expression obtenue pour $n \in \mathbb{N}^*$ vaut 1 pour $n=0$, elle est donc valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q32. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \boxed{a_n + b_n} &\stackrel{\text{Q30+31}}{=} \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^n}{\alpha^{n-1}\sqrt{5}} + \left(\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha^n\sqrt{5}} \right) \alpha \\ &= \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{5}} (1 + \alpha^2) \\ &\stackrel{\substack{\alpha \text{ racine} \\ \text{de } x^2 - x - 1 \\ \text{donc} \\ \alpha^2 = \alpha + 1}}{=} \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{5}} (1 + \alpha + 1) = \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{5}} \left(2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{5}} \times \frac{5+\sqrt{5}}{2} = \alpha^{n-1} \times \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \boxed{\alpha^n}. \end{aligned}$$

Rq: On pourrait aussi procéder par récurrence.

Q33. On a par calcul $\Pi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{I_2 + \Pi}$

Q34. Proposition à démontrer: Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $\Pi^n = a_n I_2 + b_n \Pi$ »

Initialisation: D'une part $\Pi^0 = I_2$

D'autre part $a_0 I_2 + b_0 \Pi = (b_1 - b_0) I_2 + b_0 \Pi = I_2$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

$$\Pi^{n+1} = \Pi \times \Pi^n$$

$$\stackrel{\mathcal{P}(n)}{=} \Pi \times (a_n I_2 + b_n \Pi)$$

$$= a_n \Pi + b_n \Pi^2$$

$$\stackrel{Q33}{=} a_n \Pi + b_n (I_2 + \Pi)$$

$$= b_n I_2 + (a_n + b_n) \Pi$$

définition
des suites

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} = a_{n+1} I_2 + b_{n+1} \Pi, \quad \text{et } \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie.}$$

Conclusion: D'après le principe de récurrence, on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \Pi^n = a_n I_2 + b_n \Pi.}$$